

• aber : $\int_0^{\infty} f_n(x) dx =$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{n} \frac{x}{n} e^{-x/n} dx$$

Substitution $t = x/n$

$$\int_0^{\infty} t e^{-t} dt$$

part. Integration

$$\left[t \cdot (-e^{-t}) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

□ $\uparrow$ 1. Term

Vertauschung von Grenzübergängen mit der Ableitung

Satz 13.3 : Sei $f_n \in C^1([a, b])$

mit $f_n \rightarrow f$ (also nur punktweise!)
für eine Funktion f . Es gelte

$$f_n' \rightrightarrows g$$

mit einer Funktion g auf $[a, b]$.

Dann ist $f \in C^1([a, b])$ mit $f' = g$.

Bem : ①

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n \in C^1([a, b]), \quad f_n \rightrightarrows f \\ \text{mit } f \in C^1([a, b]) \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow$ "nichts" über die Konvergenz von
 f_n' gegen f' !

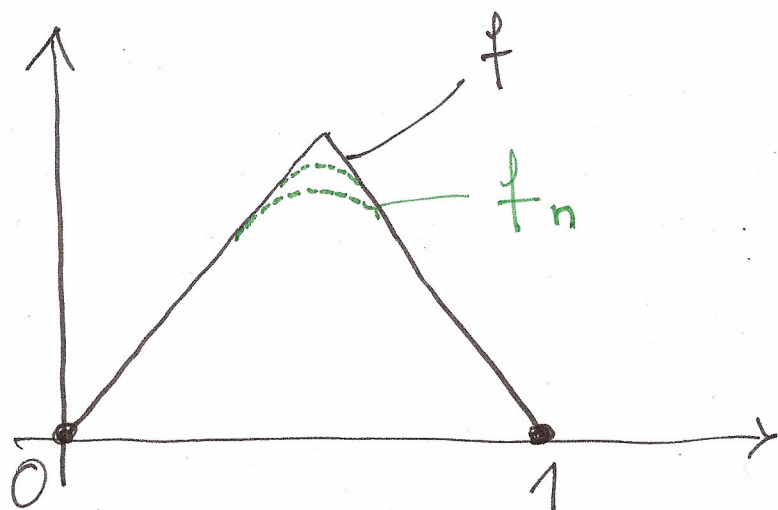
Bspl :

$$f_n(x) := \frac{1}{n} \sin(nx),$$

$$f_n \rightrightarrows f \equiv 0 \quad ; \quad \text{aber}$$

$$f_n'(x) = \cos(nx) \quad \text{Konvergiert nicht gegen } f' \equiv 0$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \varphi_n \in C^1([a, b]), \quad \varphi_n \rightrightarrows \varphi \\ \not\Rightarrow \varphi \in C^1([a, b]), \text{ nicht} \\ \text{einmal Diff'barkeit} \\ \text{von } \varphi \end{array} \right.
 \end{aligned}$$



Beweis von Satz 13.3 : Nach 13.1 ist

$$g \in C^0([a, b]);$$

$$\text{Hauptsatz} \Rightarrow \varphi_n(x) = \varphi_n(a) + \int_a^x \varphi_n'(y) dy;$$

$$\text{Satz 13.2} \Rightarrow \int_a^x \varphi_n'(y) dy \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^x g(y) dy.$$

Zusammen mit $f_n \rightarrow f$ folgt:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(y) dy \quad (*)$$

Die Funktion

$$x \mapsto f(a) + \int_a^x g(y) dy$$

ist nach dem Hauptsatz diff'bar mit
Ableitung g . Gemäß $(*)$ folgen die Aus-
sagen über f . □

Eine prominente Anwendung

Satz :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(zum Beweis benötigt man alle bisherigen Sätze!)

Hier kommt zunächst gar keine

Funktionenfolge vor! Wir behaupten:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \left(\frac{x - \pi}{2} \right)^2 - \frac{\pi^2}{12} \quad \text{für } x \in [0, 2\pi]$$

Mit $x = 0$ folgt der Satz.

Beweisskizze von (1):

$$\text{Sei} \quad f_N(x) := \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \cos(nx)$$

$$\text{und} \quad f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx).$$

Es gilt $f_N \Rightarrow f$ auf $\mathbb{R}$, da

$$\left| \frac{1}{n^2} \cos(nx) \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Lemma: Für jedes $\delta > 0$ konvergiert

$$\{f'_n\} \text{ auf } [s, 2\pi - s] \quad \boxed{\text{gleichmäßig}}$$

$$\text{gegen } x \mapsto \frac{x - \pi}{2}.$$

Nimmt man das Lemma zur Kenntnis, so ergibt Satz 13.3:

$$f'(x) = \frac{x - \pi}{2} \quad \text{auf } [s, 2\pi - s]$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x - \pi}{2} \quad \text{auf } (0, 2\pi)$$

§ beliebig

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{4}(x - \pi)^2 + c \quad \text{auf } (0, 2\pi)$$

Linke und rechte Seite sind stetig

(Satz 13.1)

kor. " "

" Korollar

für f

$$\text{auf } [0, 2\pi] \Rightarrow$$

$$(2) \quad \varphi(x) = \frac{1}{4}(x-\pi)^2 + c \quad \text{auf } [0, 2\pi]$$

Berechnung von c :

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) dx \stackrel{(2)}{=} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{4}(x-\pi)^2 + c \right\} dx = \frac{\pi^3}{6} + 2\pi c$$

|| Satz 13.2

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \varphi_N(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(nx) dx}_{=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = -\frac{\pi^2}{12}}$$

Einsetzen von c in (2) ergibt (1).

Beweis Lemma : längere Rechnung

→ Skript



In $\int_a^b f_n(x) dx$ kann $-21-$

man $n \in \mathbb{N}$ als Parameter interpretieren.

Verallgemeinerung: z. B. wird durch

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \int_a^b x^t dx$$

mit

$$0 < a < b$$

eine Funktion $F(t)$ definiert, die vom
reellen Parameter t abhängt. Es gilt:

$$F(t) = \begin{cases} \ln b/a, & t = -1 \\ \frac{1}{t+1} (b^{t+1} - a^{t+1}), & t \neq -1 \end{cases}$$

Klar: F stetig auf $\mathbb{R} - \{-1\}$!

L'Hospital $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow -1} \frac{b^{t+1} - a^{t+1}}{t+1} = \ln b/a$

Also : F stetig auf $\mathbb{R}$

Systematische Untersuchung $\rightsquigarrow$

§ 14 Parameterabhängige Integrale

$$F(t) := \int_a^b f(x, t) dx$$

Fragen: 1.) Stetigkeit, Diff'barkeit,
Int'barkeit von F ?

2.) Verhalten, wenn in der Def.
von F das Integral uneigentlich
ist?

Satz 14.1 : Seien $I := [a, b]$,
 $D := [c, d]$ kompakte Intervalle

und $\varphi: I \times D \ni (x, t) \mapsto$
 $\varphi(x, t) \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$). ^{stetig} Dann ist

$$F: D \ni t \mapsto \int_a^b \varphi(x, t) dx$$

stetig auf D .

Bem: F stetig $\Rightarrow \int_c^d F(t) dt =$

$$\int_c^d \left[\int_a^b \varphi(x, t) dx \right] dt \text{ existiert!}$$

Frage (vgl. Satz 14.3): darf man vertauschen?

Beweis v. 14.1: $\varphi \in C^0(I \times D) \Rightarrow$

$$\varphi(\cdot, t) \in C^0(I) \quad \forall t \in D \Rightarrow$$

$$\varphi(\cdot, t) \text{ auf } I \text{ int'bar } \quad \forall t \in D \Rightarrow$$

$$F(t) \text{ wohldefiniert}$$

Zur Stetigkeit von $\overline{f}$:

$$I \times D \underbrace{\text{kompakt}}_{\text{Satz 9.16}}, f \text{ stetig} \xrightarrow{\text{Satz 9.15}}$$

f gleichmäßig stetig auf $I \times D$; d.h.:

zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x_1, t_1) - f(x_2, t_2)| < \varepsilon / (b-a)$$

für alle $(x_i, t_i) \in D$, $|(x_1, t_1) - (x_2, t_2)| < \delta$;

speziell: $|f(x, t_1) - f(x, t_2)| < \varepsilon / (b-a)$

$$(\star) \quad \forall x \in I, \quad t_1, t_2 \in D, \quad |t_1 - t_2| < \delta;$$

Es folgt: $|\overline{f}(t_1) - \overline{f}(t_2)| =$

$$\left| \int_a^b (f(x, t_1) - f(x, t_2)) dx \right| \stackrel{(\star)}{\leq}$$

$$\int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon$$

für alle $t_1, t_2 \in D$, $|t_1 - t_2| < \delta$, d.h.:

F ist sogar glm. stetig auf D . $\square$

Wir wollen nun $\overline{F}(t) := \int_a^b f(x, t) dx$
differenzieren. Vorstellung: man leitet unter
dem Integral $\neq$ nach t ab !

Notation: Sei $x \in I$ fest. Wenn

$D \ni t \mapsto f(x, t)$ differenzierbar ist,
 so heißt die Ableitungsfunktion die
partielle Ableitung von f nach t ,

Schreibweisen: $D_x f(x, t)$, $D_t f(x, t)$ oder

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$$

Bspl. : $f(x, t) := \sin(xt)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = x \cdot \cos(xt)$$

(entsprechend: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = t \cos(xt)$)

Satz 14.2 : (Abliten eines Integrals nach dem Parameter)

Seien I, D wie in 14.1. Außerdem gelte:

i) $f: I \times D \rightarrow \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist
für jedes $t \in D$ Regelfkt. auf I ,
d.h. $f(\cdot, t) \in \mathcal{R}(I) \quad \forall t$

(gilt, wenn f stetig auf $I \times D$)

ii) $\frac{\partial f}{\partial t}$ sei stetig auf $I \times D$.

Dann ist $\overline{F}(t) := \int_a^b f(x, t) dx$

auf $\mathcal{D}$ differenzierbar mit

$$\overline{F}'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Bew: O.E. Sei f $\mathbb{R}$ -wertig, sonst
argumentiere Komponentenweise. Sei Var.

i) und ii) ergeben die Existenz von

$$\int_a^b f(x, t) dx \quad \text{und} \quad \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Sei $t \in \mathcal{D}$. Für $h \in \mathbb{R} - \{0\}$ mit $t+h$

$\in \mathcal{D}$ gilt

$$\left| \frac{1}{h} (\overline{F}(t+h) - \overline{F}(t)) - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \right| =$$

$$\left| \int_a^b \left\{ \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right\} dx \right| =$$

MWS

$$\left| \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(x, \tilde{t}) - \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right\} dx \right|$$

mit $\tilde{t}$ zwischen t und $t+h$ (auch
abhängig von x !).

Nach ^{Vor.} Vii) ist $\frac{\partial f}{\partial t}$ gleichmäßig stetig

auf $I \times D$, d.h. speziell

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_1) - \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_2) \right| < \varepsilon / (b-a)$$

für alle $x \in I$ und $t_1, t_2 \in D$ mit

$|t_1 - t_2| < \delta$. Wählt man $t_1 = t$, $t_2 = \tilde{t}$

und verlangt vorher $|h| < \delta$, so folgt

$$\left| \frac{1}{h} (F(t+h) - F(t)) - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \right| \leq \varepsilon.$$

2.ter Termin

